

MÉTODO GRÁFICO

PARA LA DETERMINACION DE LOS ELEMENTOS DE LA RESISTENCIA DE LOS RIELES COMPLETOS O INCOMPLETOS.

El injeniero usa mucho en las construcciones, i mas en Chile donde no existe aun la siderurjia, los rieles desgastados que no sirven en las vías. Los emplea, ya tales cuales salen del servicio de esplotacion, ya recortados lateralmente en la cabeza, en la base o en las dos a la vez. Suele ser necesario determinar la resistencia en estas condiciones. Se puede tratar la cuestion por medio del cálculo numérico, como se hace jeneralmente. Este método es mui largo i laborioso; ademas, a consecuencia de la variacion del eje neutro en cada caso particular, correspondiente a la supresion de una parte mas o ménos grande de la cabeza o de la base, los resultados de un perfil determinado no pueden servir para los demas.

Seria, pues, de desear, que por un método jeneral se pudiera obtener "de una manera sencilla", en cada caso particular, los elementos que se necesitan, es decir, el área de la seccion trasversal, el momento estático con respecto a un eje cualquiera, la posicion del eje neutro, el momento de inercia con respecto

a una base cualquiera o al eje neutro, en fin, el módulo de flexion $\frac{I}{V}$, que entra en la fórmula fundamental de la resistencia de los materiales

$$R\frac{I}{V}=M.$$

El método que damos a continuacion, basado sobre el cálculo gráfico, da una solucion completa del problema. Hemos construido para un riel del Estado chileno las curvas integrales de las áreas, de los momentos estáticos i de los momentos de inercia con respecto a la base $R\,S$. Una vez construidos estos lugares jeométricos, alcanzaremos fácilmente, en cada caso particular relativo a este riel, a resolver la cuestion que nos ocupa.

I. Curva integral de las áreas.

Para obtener la curva integral de las áreas, hemos dividido el perfil del riel en una série de áreas parciales, por medio de líneas paralelas a la base, en número suficiente para que las superficies parciales puedan asimilarse a trapecios. El área de cada uno de los trapecios será:

$$\tfrac{1}{2}\text{ suma de las bases} \times \text{altura} = \frac{\tfrac{1}{2}\text{ suma de las bases} \times \text{altura}}{1}$$

Hemos tomado una unidad $1 = 0'\ P' = 4$ c/m (fig. 2).

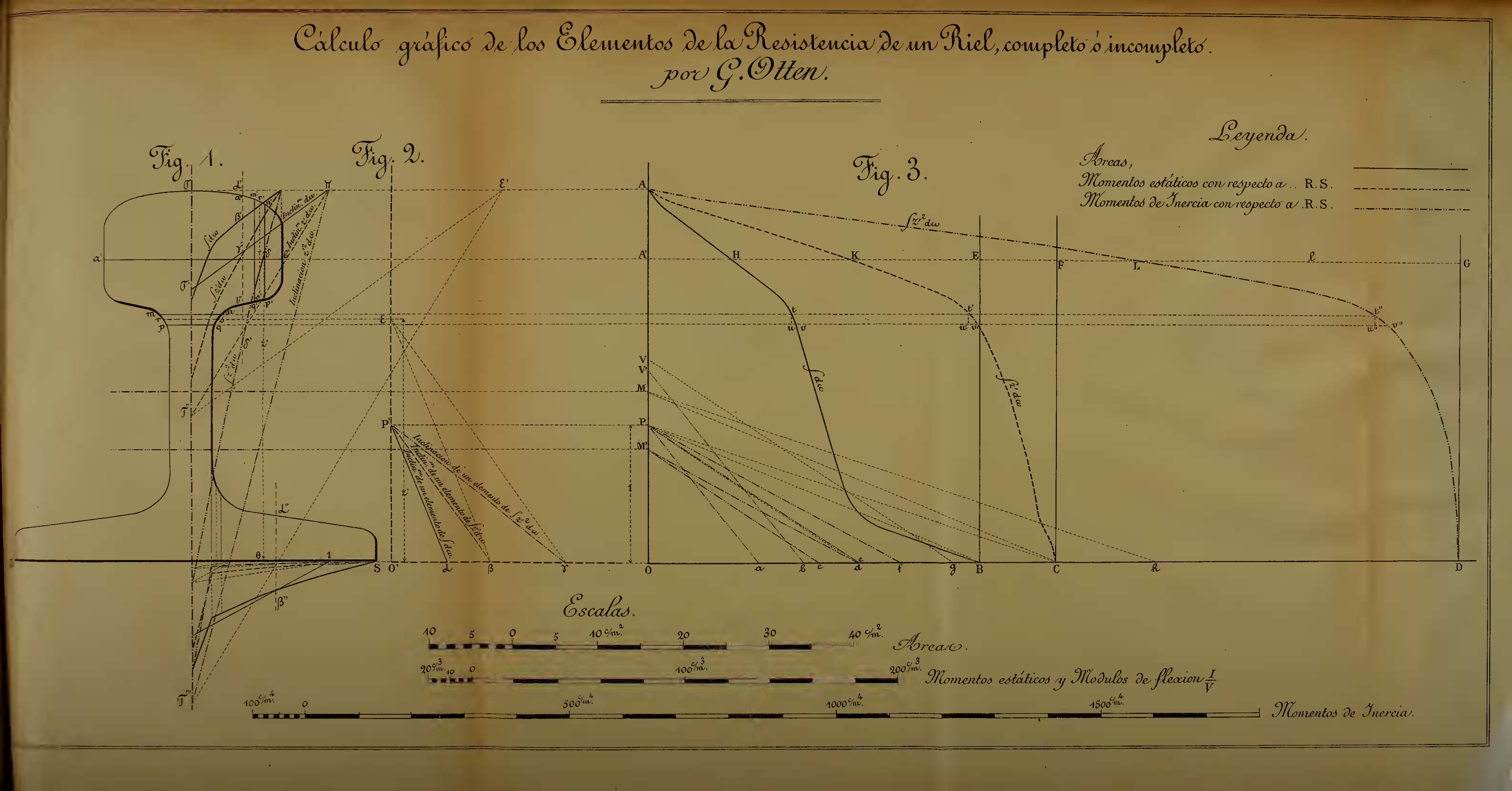
El valor de la unidad no es indiferente para la buena construccion del depurado, puesto que las escalas dependen de esa unidad. Si esta es exajerada, las ordenadas de las curvas serán demasiado pequeñas; si, al contrario, se reduce demasiado la unidad, las curvas se estienden desmesuradamente. El valor de la unidad mas conveniente en el caso de un riel está comprendido entre 3 i 5 c/m.

Sea *mnpq* uno de los trapecios parciales (fig. 1). Suponemos que el trazado de la curva $\int d\omega$ está hecho hasta el punto t correspondiente (fig. 3). Tomamos (fig. 2)

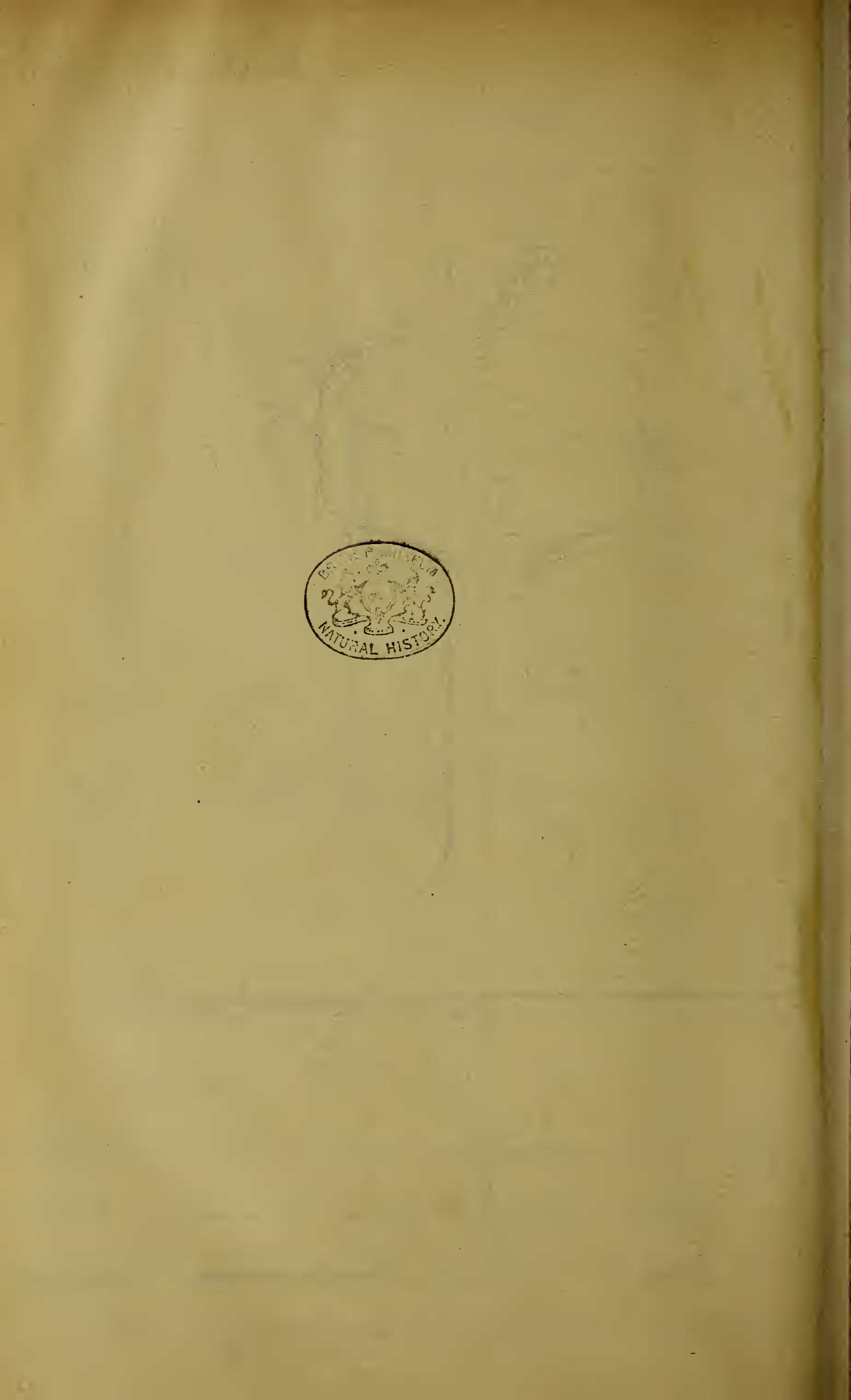
$$O'a = rs = \tfrac{1}{2} \text{ suma de las bases } mn \text{ i } pq$$

Juntamos $P'a$, i trazamos (fig. 3) tv paralelamente a $P'a$.

Los dos triángulos $O'P'a$ i tuv son semejantes. Síguese:



Cálculo gráfico de los Elementos de la Resistencia de un Riel, completo ó incompleto.
por G. Otten.
Leyenda.
Areas,
Momentos estáticos con respecto a .. R.S.
Momentos de Inercia con respecto a R.S.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Inclinacion de un elemento de ∫z² dw
Inclinon de un elemento de ∫z dw
Inclinon de un elemento de ∫dw
∫dw
∫z dw
∫z² dw
Escalas.
Areas.
Momentos estáticos y Modulos de flexion I/V
Momentos de Inercia.



$$O'a \colon O'P' = uv \colon ut$$

$$uv = \frac{O'a \times ut}{O'P'} = \frac{\text{área de } mnpq}{1}$$

o espresando todo en centímetros,

$$uv = \frac{\text{área de } mnpq \text{ en c/m}^2}{4}$$

lo que significa que el área de *mnpq* en centímetros cuadrados, es igual a cuatro veces la lonjitud de uv en centímetros. Podemos, por consiguiente, determinar fácilmente la escala de las áreas.

La operacion que acabamos de hacer para un trapecio puede repetirse para todas las áreas parciales, principiando por la parte superior de la cabeza. Trazando, una despues de la otra, las inclinaciones que corresponden a las áreas parciales respectivas, obtendremos una curva (fig. 3) en la cual cada ordenada $A'H$ tomada horizontalmente, representa el área de la parte del riel situada encima de esta línea.

II. Curva integral de los momentos estáticos con respecto a la base RS del riel.

Esta curva tiene por espresion analítica

$$y = \int z' \, d\omega$$

siendo z' la distancia del centro de gravedad del elemento $d\omega$ a la base RS.

Para construir esta curva, observaremos que nos bastará multiplicar las inclinaciones de los elementos de la curva $\int d\omega$ por el z' correspondiente. Podemos poner $z' \, d\omega$ bajo la forma:

$$\frac{z' \, d\omega}{1}$$

Tenemos $O'\epsilon = z'$ (fig. 2).

Juntamos $P'a$, trazamos $\epsilon\beta$ paralelamente a $P'a$, i juntamos $P'\beta$.

Tenemos

$$O'\beta = \frac{O'\epsilon \times O'a}{O'P'} = \frac{z' \times b}{1}$$

Trazamos (fig. 3), $t'v'$ paralelamente a $P'\beta$, resultando

$$v'u' = \frac{O'\beta \times t'u'}{O'P'} = \frac{z' \times b \times dh}{1} = z'd\omega$$

Síguese que para tener la direccion de un elemento de la curva $\int z'\, d\omega$, basta tirar por ϵ una paralela a la inclinacion del elemento de $\int d\omega$ hasta β, juntar $P'\beta$ i tirar una paralela $t'v'$ a $P'\beta$.

Se conoce desde luego que la introduccion de una unidad de 4 centímetros en lugar de 1, reduce las ordenadas de la curva de los momentos estáticos a la cuarta parte de su valor, comparativamente a las de la curva de las áreas. Las ordenadas quedan, pues, reducidas en $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ de su verdadero valor, lo que viene a decir que cada centímetro representa 16 centímetros cúbicos. Podemos, pues, construir la escala de los momentos estáticos.

Hemos trazado la curva de estos momentos como en el caso anterior, es decir, por elementos sucesivos de 3 milímetros de altura. Cada ordenada medida horizontalmente representa la suma $\int z'd\omega$ de todos los elementos que se encuentran encima de esta línea.

III. Posicion del eje neutro.

Con estas dos curvas se puede hallar la posicion del eje neutro, despues de haber cortado el riel hasta una altura cualquiera paralelamente a la base.

Si U es la distancia de la base al eje neutro, tenemos:

$$U = \frac{\int z'\, d\omega}{\Omega} = \frac{\int z'\, d\omega \times 1}{\Omega} \qquad (1)$$

El depurado da inmediatamente $\int z'd\omega$ i Ω. El trazado de una cuarta proporcional dará U. Veremos mas adelante varias aplicaciones de este caso.

En la relacion (1), importa tomar en cuenta que las ordenadas de $\int z' d\omega$ en centímetros cúbicos quedan reducidas a $\frac{1}{16}$ de su valor; mas la unidad es 4 en vez de 1, i el numerador queda reducido al $\frac{1}{4}$ de su valor. Como se sabe, el área Ω está reducida al $\frac{1}{4}$ de su valor tambien. Síguese que el trazado de la cuarta proporcional dará U en su "verdadera magnitud", deduciéndose directamente la verdadera posicion del eje neutro.

IV. Curva integral de los momentos de inercia con respecto a la base RS.

Para la determinacion de la resistencia a la flexion de las piezas, es principalmente necesario conocer I, el momento de inercia principal de su seccion trasversal, es decir, el momento de inercia con respecto al eje central.

Seria poco práctico construir la curva que se refiere a éste; pues, con motivo de la variacion del eje neutro, cada curva no tendria aplicacion sino para un caso especial.

Sin embargo, se puede simplificar mucho la cuestion.

Si llamamos I_1 el momento de inercia con respecto a RS de un perfil de seccion ω, i U la distancia del eje neutro hasta RS, tenemos la relacion conocida

$$I = I_1 - \omega . U^2$$

o

$$I = I_1 - U \times \omega U = I_1 - U \int z' d\omega$$

en la cual

$$I_1 = \int z'^2 d\omega$$

Esto es la ecuacion de un lugar jeométrico que, una vez construido, servirá, cualquiera que sea el modo de desbastar el riel, lo mismo que las curvas $\int d\omega$ i $\int z' d\omega$.

Basta multiplicar por z' las inclinaciones de los elementos de la curva $\int z' d\omega$.

Consideremos siempre el mismo elemento de área *mnpq*. Trazamos (fig. 2) $\epsilon\gamma$ paralelamente a $P'\beta$, i juntamos $P'\gamma$ La línea $t''v''$ (fig. 3) trazada paralelamente a $P'\gamma$ dará la direccion del elemento de la curva I_1.

Efectivamente, los dos triángulos semejantes $P'o'\gamma$ i $t''u''v''$ nos dan la relacion

$$v''u''=\frac{o'\gamma\times t''u''}{o'P'}$$

Como

$$t''u''=dh \qquad o'P'=1$$

i

$$o'\gamma=\frac{o'\beta\times o'\epsilon}{o'P'}=\frac{bz'\times z'}{1}=\frac{bz'^2}{1}$$

tendremos

$$v''u''=\frac{bz'^2dh}{1}=\frac{z'^2\times bdh}{1}=z'^2d\omega$$

A causa de la introduccion del factor 1, que es de 4 centímetros, las lonjitudes $v''u''$ quedan reducidas a la cuarta parte de su valor relativamente a las lonjitudes de $\int z'\,d\omega$. Las lonjitudes que dan la medida de los momentos de inercia quedan, pues, reducidas a $\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$ de su valor, tomando por unidad el centímetro. Es decir, que 1 centímetro medido horizontalmente representará 64 centímetros[4]. De esta relacion se puede deducir la escala de los momentos de inercia.

Hemos trazado, como para las áreas i los momentos estáticos, la curva de los momentos de inercia con respecto a la base $R\,S$. Una ordenada cualquiera de la curva I_1, medida horizontalmente, como $A'L$ por ejemplo, dará el valor del momento de inercia con respecto a RS del perfil que se encuentra encima de esta línea horizontal.

LG será el momento de inercia con respecto a RS de la parte del riel debajo de $a'b'$.

Se podria hacer el trazado de las curvas principiando por O, de tal manera que cada ordenada, medida horizontalmente desde la vertical oA, daria el área, el momento estático i el momento de inercia de la parte del riel que se encuentra debajo de esta ordenada. Se puede evitar así la introduccion de las ordenadas por diferencia, tales que LG, KF, HE.

No estará demás notar las relaciones de trazado entre las curvas de las áreas, de los momentos estáticos i de los momentos de inercia (fig. 2). Tambien es preferible construir las tres

curvas a la vez, determinando sucesivamente los elementos que se refieren a cada una de las áreas parciales. Operando de esta manera, el depurado se hace con bastante rapidez.

Para tener el valor de I basta determinar

$$\omega U^2 = \frac{U \times \int z' d\omega}{1}$$

Como el depurado da directamente U i $\int z' d\omega$ la determinacion de ωU^2 se reduce a la construccion mui sencilla de una cuarta proporcional.

La diferencia $I_1 - \omega U^2$ dará I.

V. Módulo de flexion $\frac{I}{V}$.

Por fin, el valor de $\frac{I}{V}$ se obtiene por el trazado de otra cuarta proporcional, poniendo la espresion bajo la forma:

$$\frac{I \times 1}{V}$$

Se ve desde luego que la escala de $\frac{I}{V}$ queda reducida a $\frac{1}{16}$ de su valor: 1 centímetro representa 16 centímetros cúbicos.

Los módulos de flexion $\frac{I}{V}$ se tomarán por consiguiente a la misma escala que los momentos estáticos.

Sucede en la práctica que se corta una parte de la base o de la cabeza de un riel paralelamente al eje de simetría, segun $\alpha'\beta'$ o $\alpha''\beta''$. Para hacer nuestro depurado aplicable a estos casos, hemos determinado, como anteriormente, las tres curvas necesarias para la solucion del problema, partiendo de la estremidad lateral de la base o de la cabeza, i caminando siempre paralelamente al eje de simetría, hasta dicho eje.

No repetiremos la demostracion relativa al trazado de estas curvas por ser idénticamente la misma que para el primer caso. Pero no estará de mas la indicacion de algunos detalles sobre la manera de hacer el trazado i de disponer el depurado.

Supongamos que se trata de determinar los elementos de las curvas que corresponden a la superficie $m'n'p'q'$ (fig. 1), estando ya construidas las curvas desde la seccion b' hasta la secion $n'p'$.

Sobre la horizontal σA, tomamos:

$\sigma\pi = 1 = 4$ centímetros.

$\sigma\epsilon' = \theta\rho = z'$

i sobre la vertical $\sigma\sigma'$,

$\sigma\sigma' = r's' = \frac{1}{2}$ suma de las bases $m'q'$ i $n'p'$.

a) La paralela a $\pi\sigma'$ nos dará la direccion del elemento correspondiente de la curva $\int d\omega$.

b) La paralela $\epsilon'\sigma''$, tirada por el punto ϵ' al radio $\pi\sigma''$, dará la direccion del elemento $\int z' d\omega$.

c) Por fin, tirando por ϵ' una paralela $\epsilon'\sigma'''$ a $\pi\sigma''$, i juntando $\pi\sigma'''$, esa será la direccion del elemento de $\int z'^2 d\omega$.

Basta examinar este depurado con alguna atencion, para notar que es idéntico al trazado del primer caso.

En el caso que se quita por parte la base del riel, la unidad i los z' se toman sobre la base del riel hácia la derecha desde el eje de simetría; las semi-sumas de las bases se llevan sobre el mismo eje de simetría hácia abajo, desde la base $R\ S$. Indicamos el modo de trazar un elemento de cada una de esas curvas.

Conviene no perder de vista que, para la cabeza como para la base, los momentos estáticos i los momentos de inercia han sido tomados siempre con respecto a la base RS. De manera que, haciendo la seccion $a''b''$ (fig. 1) tendremos:

$a'\beta'$=área de la parte de cabeza $a''b'b''$.

$a'\gamma'$=momento estático de $a''b'b''$ con respecto a RS.

$a'\delta'$=momento de inercia de $a''b'b''$ con respecto a RS.

APLICACIONES

1.° Determinar los elementos de la resistencia de un riel completo.

a) Área. El depurado da inmediatamente $\Omega = OB$.

b) Momento de inercia con respecto a RS.

$$\int z' d\omega = OC$$

c) Posicion del eje central.

Tenemos

$$U = \frac{\int z' d\omega \times 1}{\Omega}$$

Sea $OP = 1$ (fig. 3).

Juntamos PB i trazamos CM paralelamente a PB, tendremos

$$OM = \frac{OC \times OP}{OB} = \frac{\int z' d\omega \times 1}{\Omega} = U.$$

Resulta que la paralela a la base RS trazada por M dará, sin cambio de escala, la verdadera posicion del eje central.

d) Momento de inercia con respecto a RS.

$$I_1 = \int z'^2 d\omega = OD$$

e) Momento de inercia principal I

$$I = I_1 - \omega U^2$$

Tenemos

$$\omega U^2 = \frac{U \times \int z' d\omega}{1}$$

Juntamos PC i trazamos Mh paralelamente a PC.

Tendremos

$$Oh = \frac{OM \times OC}{OP} = \frac{U \times \int z d\omega}{1} = \omega U^2.$$

Finalmente

$$I = I_1 - \omega U^2 = OD - Oh = hD$$

f) Módulo de flexion $\frac{I}{V}$

V=distancia del eje neutro a la fibra mas alejada de la seccion $=MA$.

Tomando

$$Og=hD=I \quad \text{i} \quad OV=MA=V$$

Juntando Vg i trazando Pd paralelamente a Vg, tendremos

$$Od=\frac{Og\times OP}{OV}=\frac{I\times 1}{V}=\frac{I}{V}$$

2.º Los rieles de acero, que sufren el tráfico de los trenes, se desgastan horizontalmente en la cabeza, i llega un dia que su resistencia queda deficiente. Importa, pues, que el injeniero determine ese límite.

Exajerando, sea $a'\,b'$ el desgaste del riel i buscamos la resistencia de la seccion restante $a'\,b'\,R\,S$.

a) Area. Tirando la horizontal $a'b'A'HG$ i las verticales BE, CF, DG, se deduce de lo que queda espuesto que la área perdida está representada por $A'H$, i por consiguiente HE nos dará, en la escala correspondiente, el valor Ω' del riel desgastado.

b) Momento estático con respecto a RS.

Segun el depurado, el momento estático con respecto a RS de la área $a'\sigma b'$ está representado por $A'K$.

Tendremos, pues, como valor del momento estático de la parte que queda

$$\int z'd\omega=A'F-A'K=KF.$$

c) Posicion del eje neutro.

$$U'=\frac{\int z'd\omega'\times 1}{\omega'}$$

Tomamos $Of=HE=\omega'$ i $Oe=KF=\int z'd\omega'$.

Juntamos Pf i trazamos eM' paralelamente a Pf. Tendremos

$$OM'=\frac{Oe\times OP}{Of}=\frac{\int z'd\omega'\times 1}{\omega'}=U'$$

d) Momento de inercia con respecto a RS.

Segun el depurado

$$I'_1 = LG$$

e) Momento de inercia principal I'

$$I' = I'_1 - \omega' U'^2$$

Juntando Pe i tirando $M'c$ paralelamente a Pe, tendremos

$$Oc = \frac{OM' \times Oe}{OP} = \frac{U' \times \int z' d\omega'}{1} = \omega' U'^2$$

Finalmente

$$I' = LG - Oc = LG - Ll = lG$$

Son notables las relaciones de trazado para la determinacion del eje neutro i de la espresion $\omega' U'^2$. Efectivamente, cualquiera que sea el perfil, si tomamos desde O las lonjitudes $Of = \omega'$ = área del perfil, i $Oe = \int z' d\omega'$ correspondiente al mismo perfil, tendremos siempre:

1.º La verdadera posicion del eje neutro, trazando por e una paralela eM' a fP.

2.º El valor de $\omega' U'^2$, trazando por M' una paralela $M'c$ a Pe.

Se ve que los trazados son mui sencillos i de ellos se deduce con la mayor facilidad la posicion del eje neutro i el valor del momento de inercia principal de una porcion cualquiera del riel.

f) Módulo de flexion. $\frac{I'}{V'}$

Notando que:

$$V' = M'A' = OV'$$

se tomará

$$Ob = lG = I'$$

se juntará $V'b$ i trazará Pa paralelamente o $V'b$. Entónces, se ve que

$$Oa = \frac{Ob \times OP}{OV'} = \frac{I' \times 1}{V'} = \frac{I'}{V'}$$